7.4.9 Výpočty vzdáleností I

Předpoklady: 7407

Př. 1: Urči vzdálenost bodu P od roviny ρ. Příklad řeš ve dvou sloupcích, vlevo konkrétně pro bod $P[4;-3;3]$ a rovinu $\rho: x-2y+2z+2=0$, vpravo obecně pro bod $P[p_1;p_2;p_3]$ a rovinu $\rho: ax+by+cz+d=0$.

Postup při výpočtu:

1. Najdeme přímku q, která prochází bodem P a je kolmá na rovinu ρ.
2. Najdeme průsečík Q přímky q a roviny ρ.
3. Vzdálenost $d=|PQ|$ je vzdáleností bodu P od roviny ρ.

Určení přímky q:

Normálový vektor roviny ρ $\boldsymbol{n}_\rho=(1;-2;2)$ je směrovým vektorem kolmice q. $\Rightarrow$

$$q:\ \begin{aligned} x&=4+t\\ y&=-3-2t\\ z&=3+2t \end{aligned}$$

Průsečík přímky q a roviny ρ:

$\rho: x-2y+2z+2=0$

$$q:\ \begin{aligned} x&=4+t\\ y&=-3-2t\\ z&=3+2t \end{aligned}$$

Dosadíme přímku do rovnice roviny:

$(4+t)-2(-3-2t)+2(3+2t)+2=0$

$4+t+6+4t+6+4t+2=0$

$9t=-18$

$t=-2$

Dosadíme parametr do rovnice přímky q:

$x=4+t=4+(-2)=2$

$y=-3-2t=-3-2(2)=1$

$z=3+2t=3+2(-2)=-1$

Průsečíkem je bod $Q[2;1;-1]$.

Vzdálenost bodů P a Q

$|PQ|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}=$

$=\sqrt{(2-4)^2+(1-(-3))^2+(-1-3)^2}=6$

Určení přímky q:

Normálový vektor roviny $\boldsymbol{n}_\rho=(a;b;c)$ je směrovým vektorem kolmice q. $\Rightarrow$

$$q:\ \begin{aligned} x&=p_1+at\\ y&=p_2+bt\\ z&=p_3+ct \end{aligned}$$

Průsečík přímky q a roviny ρ:

$\rho: ax+by+cz+d=0$

$$q:\ \begin{aligned} x&=p_1+at\\ y&=p_2+bt\\ z&=p_3+ct \end{aligned}$$

$a(p_1+at)+b(p_2+bt)+c(p_3+ct)+d=0$

$ap_1+a^2t+bp_2+b^2t+cp_3+c^2t+d=0$

$a^2t+b^2t+c^2t=-(ap_1+bp_2+cp_3+d)$

$t=-\dfrac{(ap_1+bp_2+cp_3+d)}{a^2+b^2+c^2}$

Výraz pro t je příliš složitý, bod Q budeme zapisovat bez toho, abychom za t dosadili.

Průsečíkem je bod $Q[p_1+at;p_2+bt;p_3+ct]$.

Vzdálenost bodů P a Q

$|PQ|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}=$

$=\sqrt{([p_1+at]-p_1)^2+([p_2+bt]-p_2)^2+([p_3+ct]-p_3)^2}$

$=\sqrt{a^2t^2+b^2t^2+c^2t^2}=\sqrt{t^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=$

$=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Dosadíme parametr $t = -\frac{(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$

$|PQ| = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$

$= \left| -\frac{(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$

$= \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$

$= \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Získali jsme poměrně jednoduchý vzorec, který umožňuje spočítat vzdálenost bodu od roviny.

Vzdálenost bodu $P[p_1; p_2; p_3]$ od roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ je dána vzorcem $d = |P\rho| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Vzorec je analogií vzorce pro vzdálenost bodu od přímky zapsané obecnou rovnicí v rovině.
Z jakých částí se vzorec skládá:

- $|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|$ - Dosazení bodu do rovnice roviny. Pro bod v rovině vyjde nula, zřejmě větší absolutní hodnota výrazu znamená větší vzdálenost od roviny, hodnota však závisí na použitém normálovém vektoru.
- $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - Velikost normálového vektoru (větší normálový vektor znamená větší hodnotu výrazu v čitateli) $\Rightarrow$ hodnotu čitatele musíme vydělit velikostí vektoru.

Př. 2: Urči vzdálenost bodu $P[4;-3;3]$ od roviny $\rho: x - 2y + 2z + 2 = 0$ pomocí odvozeného vzorce.

$\rho: x - 2y + 2z + 2 = 0$ $\qquad$ $P[4;-3;3]$

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|4 - 2\cdot(-3) + 2\cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|18|}{3} = 6$$

Stejný výsledek jako při výpočtu z definice.

Př. 3: Urči vzdálenost bodu $P[1;-3;5]$ od roviny *ABC*: $A[-1;0;0]$, $B[1;2;1]$, $C[3;0;-2]$.

Nejdříve musíme určit obecnou rovnici roviny *ABC*.
Určíme dva směrové vektory:

$$\boldsymbol{u} = B - A = (2;2;1)2;2$$

$C - A = (4;0;-2) \Rightarrow \boldsymbol{v} = (2;0;-1)2;0$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-2 - 0; 2 + 2; 0 - 4) = (-2;4;-4) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (1;-2;2)$

Rovnice: $x - 2y + 2z + d = 0$.

Dosadíme bod *A*: $-1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 1$.

Rovina *ABC* má rovnici: $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Vzdálenost bodu $P[1;-3;5]$ od roviny ABC: $x-2y+2z+1=0$

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1-2\cdot(-3)+2\cdot 5+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|18|}{3}=6$$

Vzdálenost bodu $P[1;-3;5]$ od roviny ABC je 6.

Př. 4: Urči vzdálenost rovin $\rho: 2x-y+3z+1=0$ a $\sigma: 4x-2y+6z+5=0$.

Vzdálenost rovin má smysl, jen když jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ vypíšeme normálové vektory:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{n}_\rho=(2;-1;3)\\ \boldsymbol{n}_\sigma=(4;-2;6)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ platí } \boldsymbol{n}_\sigma=2\boldsymbol{n}_\rho \Rightarrow \text{ roviny jsou rovnoběžné.}$$

Určíme vzdálenost libovolného bodu roviny σ od roviny ρ:

Hledáme bod v rovině σ: zvolíme například: $S[0;y;0]$ $\Rightarrow$ dosadíme do roviny a dopočítáme souřadnici: $4x-2y+6z+5=4\cdot 0-2\cdot y+6\cdot 0+5=0 \Rightarrow y=\frac{5}{2}$.

$\Rightarrow$ Určujeme vzdálenost bodu $S\left[0;\frac{5}{2};0\right]$ od roviny $\rho: 2x-y+3z+1=0$:

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|2\cdot 0-1\cdot\frac{5}{2}+3\cdot 0+1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{14}}=\frac{3}{2\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{28}.$$

Vzdálenost rovin ρ a σ je $\frac{3\sqrt{14}}{28}$ (a je vidět, že se nerovná rozdílu koeficientů *d* v rovnicích obou rovin).

Př. 5: Na přímce $p=\{[1+2t;3-t;4+t];t\in R\}$ najdi bod, jehož vzdálenost od souřadné roviny *xz* je 5. Je možné příklad vyřešit i bez použití vzorce pro vzdálenost bodu od roviny?

Hledaný bod má souřadnice: $X[1+2t;3-t;4+t]$. Známe jeho vzdálenost od roviny *xz* $\Rightarrow$ můžeme jeho souřadnice dosadit do vzorce a získáme rovnici s jednou neznámou.

Rovnice roviny *xz*: $y=0$ (rovina obsahuje osy *x* a *z*, tedy všechny body v prostoru s nulovou *y*-ovou souřadnicí).

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|0\cdot(1+2t)+1\cdot(3-t)+0\cdot(4+t)+0|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{|3-t|}{1}=5$$

$|3-t|=|t-3|=5 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 3 o 5 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $t_1=8 \Rightarrow X_1[1+2\cdot 8;3-8;4+8]\Rightarrow X_1[17;-5;12]$
- $t_2=-2 \Rightarrow X_2[1+2\cdot(-2);3-(-2);4+(-2)]\Rightarrow X_2[-3;5;2]$

Hledanými body jsou body $X_1[17;-5;12]$ a $X_2[-3;5;2]$.

Body můžeme najít i bez vzorce. Protože určujeme vzdálenost bodů od roviny *xz*, hledáme body podle jejich *y*-ové souřadnice $\Rightarrow$ hledáme na přímce *p* body, jejichž *y*-ová souřadnice se rovná ± 5.

Př. 6: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH* $a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost bodu *E* od roviny *AFH*.

Příklad ze stereometrie. Tehdy to bylo docela těžké.
Skoroproblém: Nemáme žádné souřadnice pro vrcholy krychle $\Rightarrow$ zavedeme si je. Například vrchol *D* umístíme do počátku, vrchol *A* na osu *x*, vrchol *C* na osu *y*, vrchol *H* na osu *z*.
Sepíšeme si souřadnice všech vrcholů:

$A[4;0;0]$	$B[4;4;0]$	$C[0;4;0]$	$D[0;0;0]$
$E[4;0;4]$	$F[4;4;4]$	$G[0;4;4]$	$H[0;0;4]$

Určíme rovnici roviny *AFH*:

Směrové vektory: $\begin{array}{l} F - A = (0;4;4) \\ H - A = (-4;0;4) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boldsymbol{u} = (0;1;1;)0;1 \\ \boldsymbol{v} = (-1;0;1) - 1;0 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{n} = (1;-1;1)$.

Rovnice: $x - y + z + d = 0$, dosadíme bod $A[4;0;0]$ $4 - 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -4$.

Rovina *AFH*: $x - y + z - 4 = 0$.

Vypočteme vzdálenost bodu $E[4;0;4]$ od roviny *AFH*:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|4 - 0 + 4 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vzdálenost bodu *E* od roviny *AFH* se rovná $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Př. 7: Petáková:
strana 120/cvičení 67
strana 120/cvičení 70

Shrnutí: Protože obecná rovnice roviny má v prostoru velmi podobný význam jako obecná rovnice přímky v rovině, existuje v prostoru pro vzdálenost bodu od roviny velmi podobný vzorec jako v rovině pro vzdálenost bodu od přímky.